შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 145

ამოცანა № 4

გვერდი № 1

$$f(x+yf(x)) = f(f(x)) + xf(y)$$

$x=0$ $\quad f(yf(0)) = f(f(0))$

$$yf(0) = f(0)$$

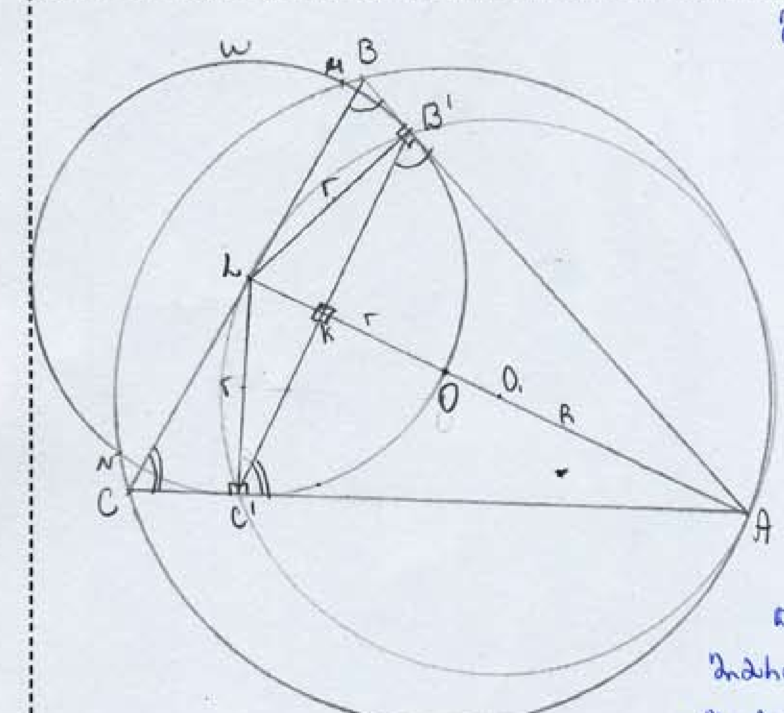
$$f(0) = 0$$

$y=0$ $\quad f(x) = f(f(x)) + xf(0)$

$$xf(0) = 0$$

$$f(x) = f(f(x))$$

$$f(x) = x$$



მოც: $\triangle ABC$, $L(r)$,
$L \in BC$, $B'L \perp AB$,
$LC' \perp AC$, $O \in \overset{\frown}{B'C'}$

დ.ს.: $O(R) \cap L(r) = M, N$

$\square LC'AB'$-ში $\angle LB'A = 90$; $\angle LC'A = 90°$

$\angle LC'A + \angle LB'A = 180°$

$\square LC'AB'$ ციკლურია

შემოვხაზოთ $\square LC'AB'$-ზე $O_1(r_1)$ წრეწირი.

$LC' = LB' = r$

$\square LC'AB'$ ჩახაზულია AL დიამეტრის წრეში, ამიტომ O_1 ცენტრი AL დიამეტრის შუაწერტილია. (AL დიამეტრია რადგან $\angle LC'A = 90°$)

$\angle LBA = \dfrac{\overset{\frown}{AC'L} - \overset{\frown}{B'L}}{2}$ (როგორც ქორდით და მხებით შექმნილი კუთხე)

$\angle LBA = \dfrac{\overset{\frown}{AC'} + \cancel{\overset{\frown}{LC'}} - \cancel{\overset{\frown}{B'L}}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{AC'}}{2} = \angle C'B'A$ ანალოგიურად $\angle LCA = \angle B'C'A \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AB'C'$

რადგან $O_1(r_1)$ წრეწირში ჩახაზული $\triangle AC_1B_1$ [ლოკალური] სიმაღლეების სიმაღლე O_1 ცენტრზე გადის, $O(R)$ წრეწირში ჩახაზული $\triangle ABC$ ლოკალური სიმაღლეების სიმაღლე AL O ცენტრზე გავა.

$\triangle B'LA \sim \triangle KLB'$

$\dfrac{r}{R+r} = \dfrac{LK}{r}$

$LK = \dfrac{r^2}{R+r}$

$B'A^2 + r^2 = (R+r)^2$

$B'A = \sqrt{R^2+2Rr}$

$\triangle ALB \sim \triangle AKB$

$\dfrac{AK}{AL} = \dfrac{AB'}{AB}$

$\dfrac{AL - LK}{AL} = \dfrac{AB'}{AB} \Rightarrow AB = \dfrac{(R+r)^2}{\sqrt{R^2+2Rr}}$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 145

ამოცანა № 5

გვერდი № 2

$BL = \sqrt{AB^2 + AL^2}$

$BL = \sqrt{\frac{(R+r)^4}{R^2+2Rr} - (R+r)^2} = \frac{(R+r)r}{\sqrt{R^2+2Rr}}$ $\qquad BC = 2BL = \frac{2(R+r)r}{\sqrt{R^2+2Rr}}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$ $\qquad S_{\triangle ABC} = S_{\triangle CLA} + S_{\triangle BLA} = \frac{r}{2}(AC + AB) = r \cdot AB$

$\frac{\cancel{AB^2} \cdot BC}{4R} = r \cdot \cancel{AB}$ $\qquad R = \frac{AB \cdot BC}{4r}$

იმისათვის, რომ ABC სამკუთხედის შემოხაზული და ... წერტილები ორ წრეწირზე ვაჩვენოთ, საკმარისია, რომ 2r მეტი იყოს R-ზე.

$2r > \frac{AB \cdot BC}{4r}$ $\qquad 8r^2 > AB \cdot BC$

$8r^2 > \frac{2r(R+r)^3}{R^2+2Rr}$ $\qquad 4r(R^2+2Rr) > R^3 + 3R^2r + 3r^2R + r^3$

$R^2r + 5Rr^2 - R^3 - r^3 > 0$

$R^2(r-R) > r^2(r-5R)$ $\qquad \begin{matrix} R^2 > r^2 \\ r-R > r-5R \end{matrix} \Rightarrow 2r > R$

რადგან $2r > R$ წერტილები ორ წრეწირზე ძევს რ.დ.გ.

მოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 145

ამოცანა № 6

გვერდი № 1

$$\frac{1}{a^2-2a+5}+\frac{1}{b^2-2b+5}+\frac{1}{c^2-2c+5}=$$

$$=\frac{1}{(a-1)^2+4}+\frac{1}{(b-1)^2+4}+\frac{1}{(c-1)^2+4}=$$

$$=\frac{1}{(b+c)^2+4}+\frac{1}{(a+c)^2+4}+\frac{1}{(a+b)^2+4}$$

$$b+c<1$$

$$(b+c)^2<1$$

$$(b+c)^2+4<5$$

$$\frac{1}{(b+c)^2+4}>\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{(b+c)^2+4}+\frac{1}{(a+c)^2+4}+\frac{1}{(a+b)^2+4}>\frac{3}{5}$$